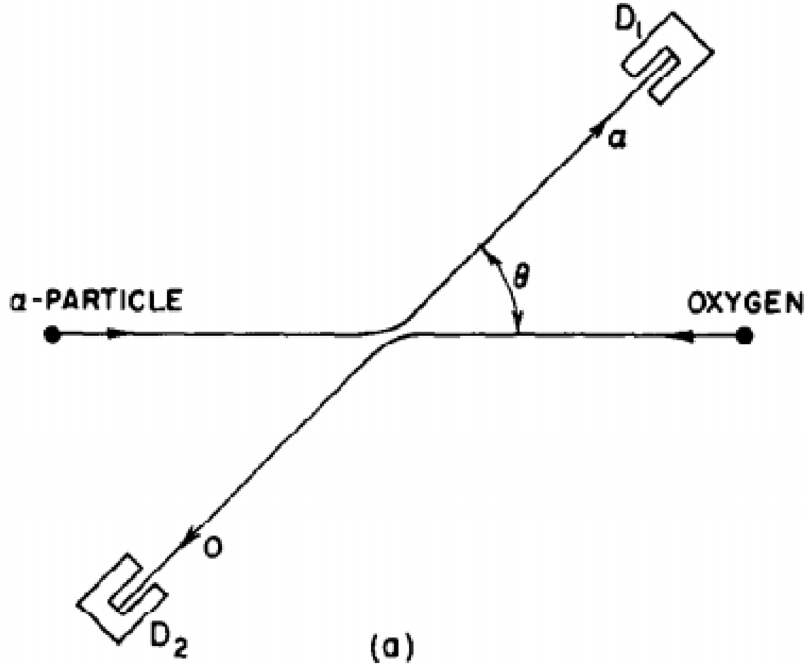
量子波澜-4

上海交通大学机械与动力学院

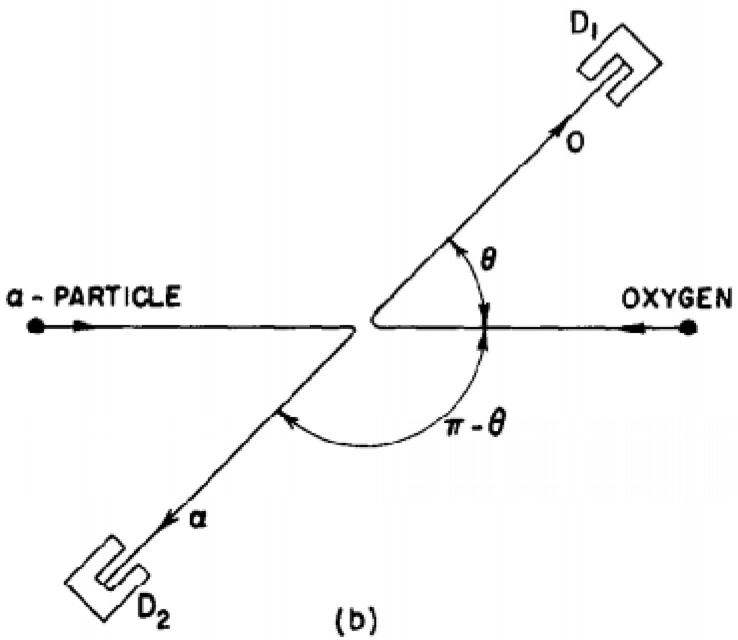
全同粒子



α粒子和氧原子核的散射，质心坐标系，D_1只能探测 α 粒子，D_2只能探测氧.

散射到 θ 方向的概率幅为 $f(\theta)$.

在θ角探测到粒子的概率为 $|f(\theta)|^2$.



α粒子和氧原子核的散射，质心坐标系，D_1能探测 α 粒子和氧.

α 粒子散射到 θ 方向的概率幅为 $f(\theta)$，若氧原子核散射到 θ 则 α 粒子散射到 $\pi-\theta$.

D_1探测到粒子的概率为：α粒子和氧可以区分

$$P=|f(\theta)|^2+|f(\pi-\theta)|^2$$

两个α粒子的散射，(a), (b)两种情况无法区别， 于是θ方向的散射幅为

$$f(\theta)+f(\pi-\theta)$$

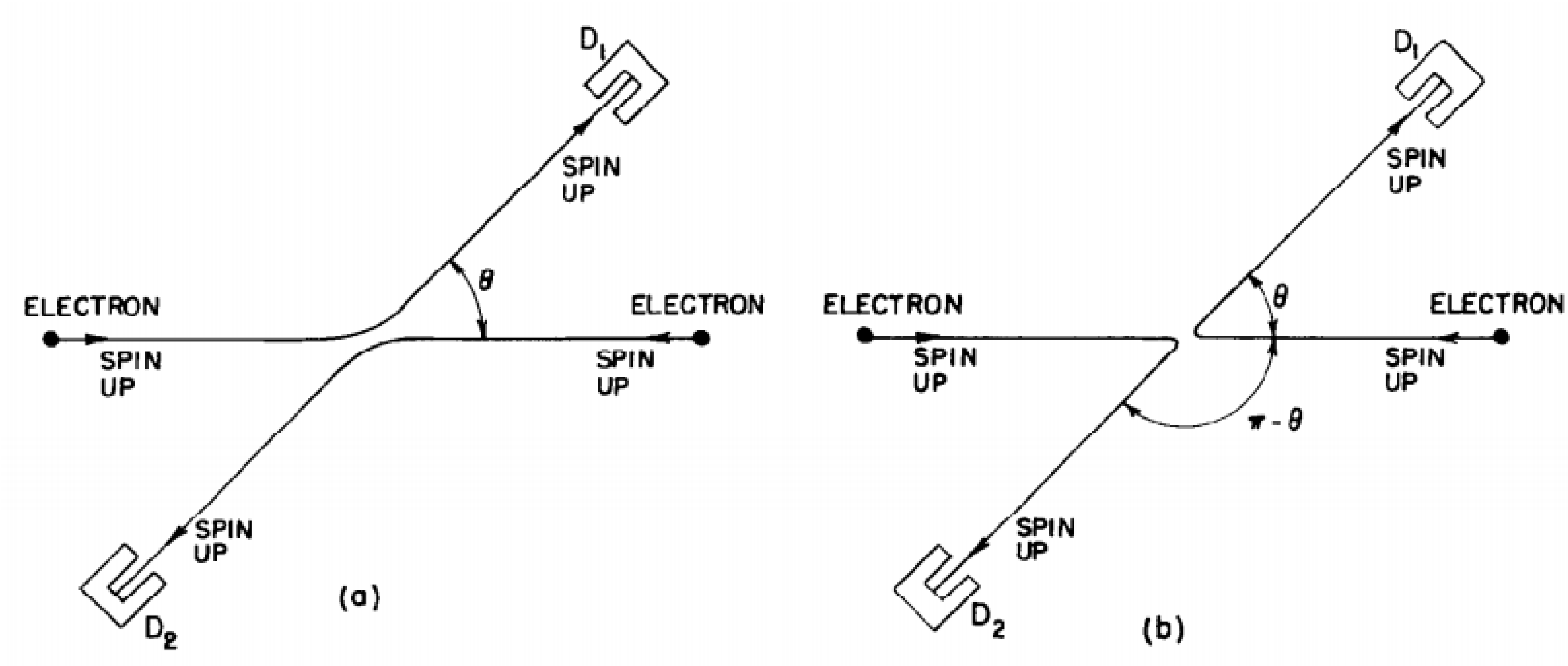
θ方向的散射概率成为

$$P=|f(\theta)+f(\pi-\theta)|^2$$

当$\theta=\frac{\pi}{2}$时， $P=4\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|^2$

不同粒子的散射，$P=2\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|^2$

两个电子的散射



概率幅为：

$$f(\theta) - f(\pi - \theta)$$

概率：

$$P = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2$$

当$\theta = \frac{\pi}{2}$时， $P = 0!$

如果两个自旋相反的电子散射，可分辨，为概率相加

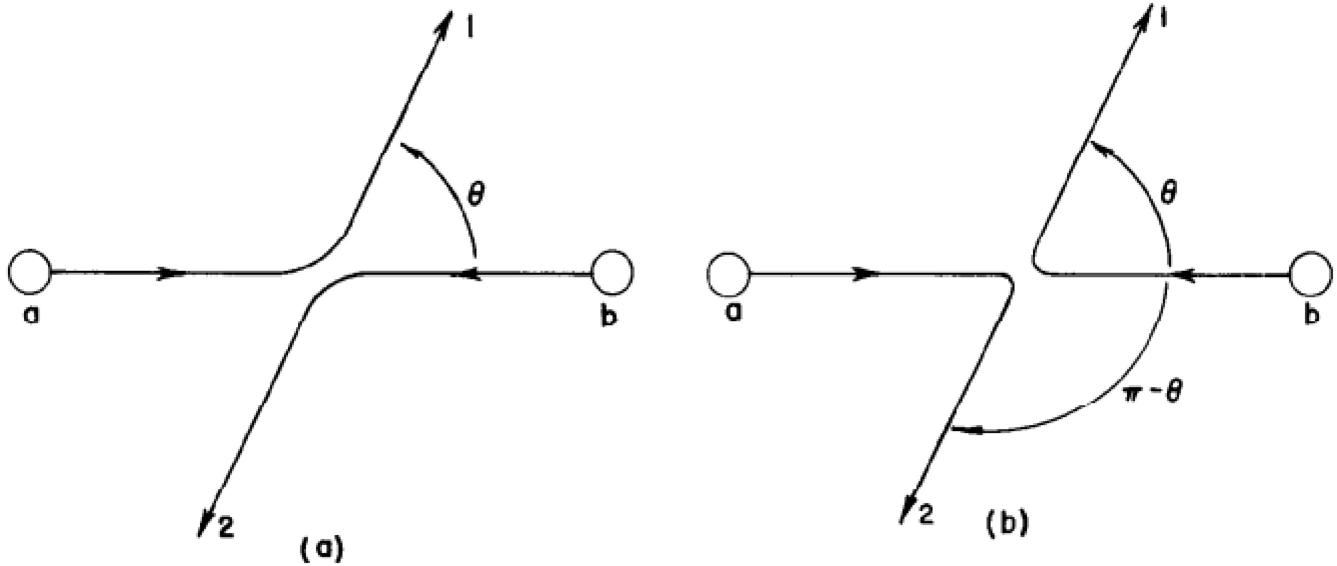
非极化电子，两种电子各占一半

Scattering of unpolarized spin one-half particles

Fraction of cases	Spin of particle 1	Spin of particle 2	Spin at D_1	Spin at D_2	Probability
$\frac{1}{4}$	up	up	up	up	$\lvert f(\theta) - f(\pi - \theta)\rvert^2$
$\frac{1}{4}$	down	down	down	down	$\lvert f(\theta) - f(\pi - \theta)\rvert^2$
$\frac{1}{4}$	up	down	up	down	$\lvert f(\theta)\rvert^2$
			down	up	$\lvert f(\pi - \theta)\rvert^2$
$\frac{1}{4}$	down	up	up	down	$\lvert f(\pi - \theta)\rvert^2$
			down	up	$\lvert f(\theta)\rvert^2$
Total probability $= \frac{1}{2}\lvert f(\theta) - f(\pi - \theta)\rvert^2 + \frac{1}{2}\lvert f(\theta)\rvert^2 + \frac{1}{2}\lvert f(\pi - \theta)\rvert^2$					

当$\theta = \frac{\pi}{2}$时， $P = \left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|^2$， 为经典值的一半

玻色子和费米子



两个粒子的散射， a散射到1， 概率幅 $f(\theta)$, b 散射到2，

若a散射到2， b散射到1， 则概率幅为$f(\pi-\theta)$.

当$a \leftrightarrow b$, $f(\theta)$变为 $e^{i\delta} f(\pi-\theta)$

交换两次回复原状， $e^{i\delta}e^{i\delta}=1$, $e^{i\delta}=\pm 1$

全同粒子分为两类： $e^{i\delta}=1$, 玻色子，

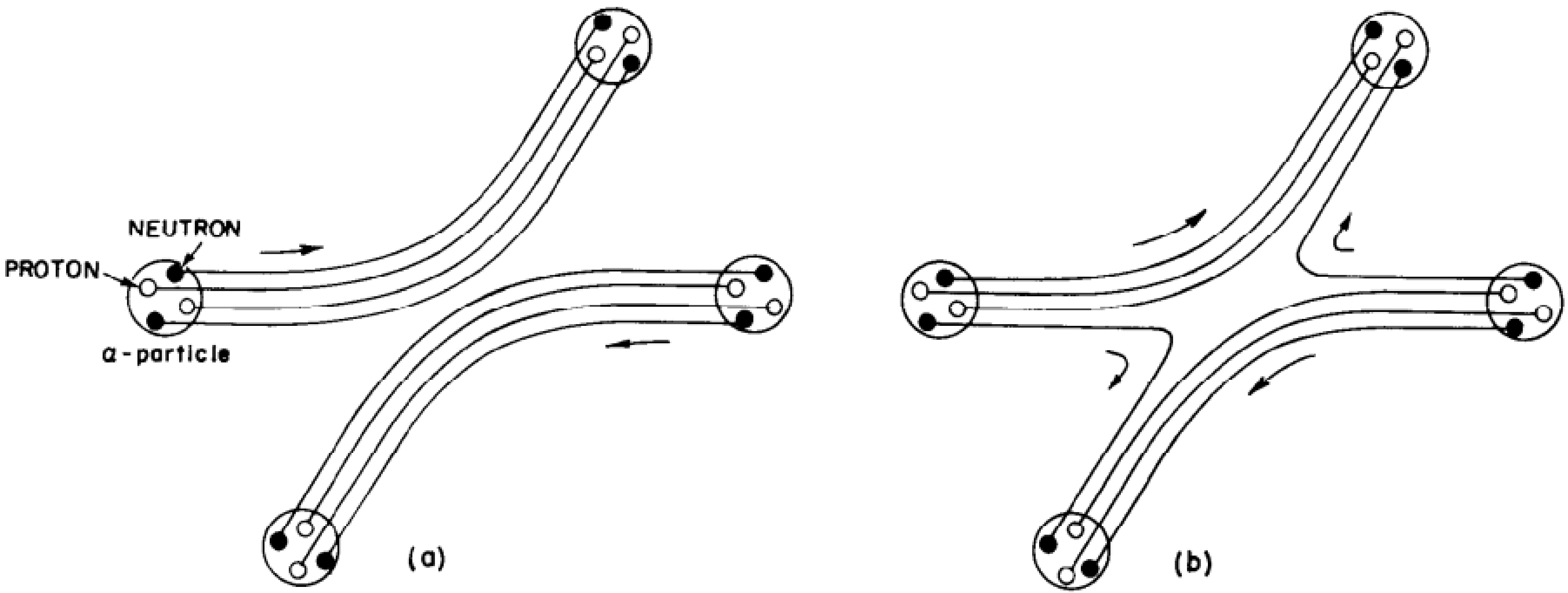
$e^{i\delta}=-1$, 费米子

全同粒子的散射幅

$f(\theta) \pm f(\pi-\theta)$ 正号对应于玻色子，负号对应于费米子

玻色子

复合粒子，低能下是一个整体。四个部分可同时交换

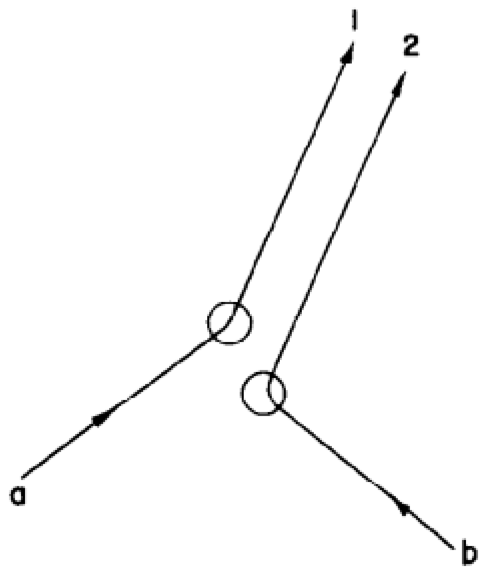


两个 α粒子之间的散射，高能时，可以交换一对，或两对，三对粒子

(b), 显示交换一对中子。

两个玻色子

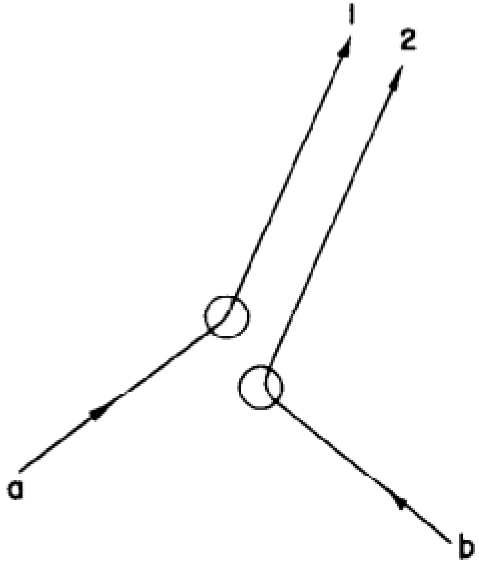
考虑两个玻色子散射到几乎相同的方向1和2.



a粒子散射到1方向，概率幅为 a_1, b粒子散射到2方向，概率幅为b_2.

概率幅： $\phi = a_1 b_2$

概率： $P = |\phi|^2 = |a_1|^2 |b_2|^2$



另一方面，a粒子可以散射到2方向，其概率幅为 a_2，b粒子散射到1方向， 其概率幅为b_1.

概率幅： $\phi = a_2 b_1$

概率： $P = |\phi|^2 = |a_2|^2 |b_1|^2$

概率： $P = |\phi|^2 = |a_1|^2 |b_2|^2$

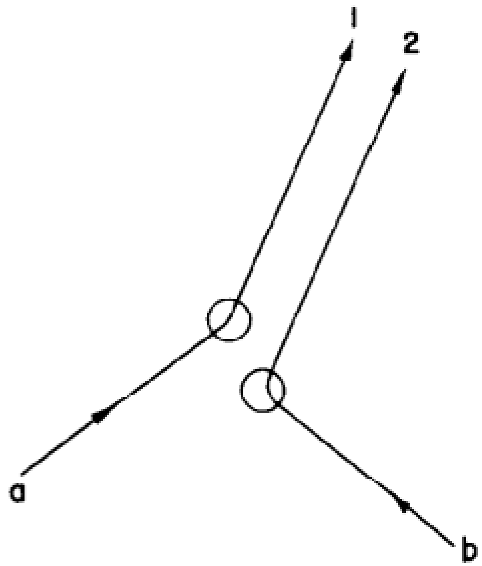
如果同时探测1和2两个方向，概率为

$$P_2 = |a_1|^2 |b_2|^2 + |b_1|^2 |a_2|^2$$

但是， 如果a和b两个粒子是全同的玻色子，则无法区分 1和2收到的是a或是b， 也就是说，$a_1 b_2$ 与 $a_2 b_1$是无法区分的，因此

$$\phi = a_1 b_2 + a_2 b_1$$

$$\begin{aligned} P_2 = |\phi|^2 &= |a_1 b_2 + a_2 b_1|^2 \\ &= |a_1 b_2|^2 + |a_2 b_1|^2 + 2Re(a_1 b_2 \overline{a}_2 \overline{b}_1) \end{aligned}$$



当1和2趋近并重合, $a_1 \to a$, $a_2 \to a$, $b_1 \to b$, $b_2 \to b$

$$\phi = ab + ab$$

$$P_2 = |\phi|^2 = 4|ab|^2$$

如果可区分

$$P_2 = 2|ab|^2$$

测量：探测器有一定面积

实际测量时，探测器有一定的大小，设为ΔS, 如果粒子可以分辨。

若1, 2方向不重合，

$$P_2 = \left(|a_1|^2|b_2|^2 + |a_2|^2|b_1|^2\right)(\Delta S)^2$$

若 1, 2 方向重合（各自代表一个ΔS的面积），粒子a到达探测器的概率为 $|a|^2\Delta S$, 粒子b到达探测器的概率$|b|^2\Delta S$,

$$P_2 = |a|^2|b|^2(\Delta S)^2$$

如果粒子不可以分辨， 1, 2 方向重合（各自代表一个ΔS的面积）， 粒子a 到达探测器的概率幅为 a, 粒子b到达探测器的概率 b, 总概率幅 $\phi = ab + ba = 2ab$

$$P_2? = 4|a|^2|b|^2(\Delta S)^2$$

但两个ΔS 的重合应予扣除，上述结果应该除以2. 于是

$$P_2 = 2|a|^2|b|^2(\Delta S)^2$$

n个玻色子

n个玻色子散射到同一方向的概率幅

$$\phi = abc\cdots + bc\cdots + \text{总共}n!\text{项} = n!abc\cdots$$

n个ΔS 的置换， $n!$种

概率

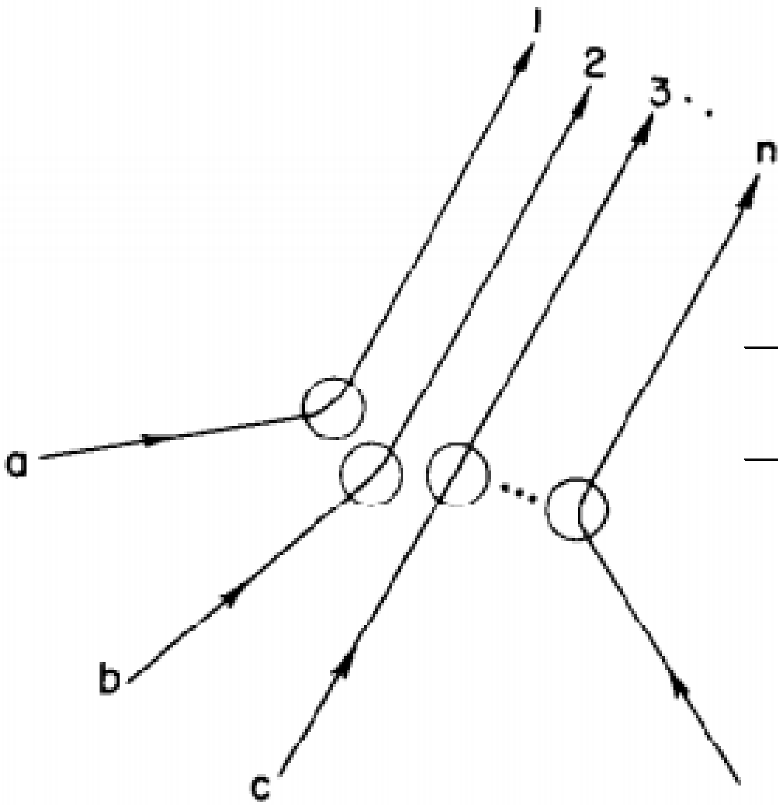
$$P_n = n!|a|^2|b|^2|c|^2\cdots(\Delta S)^n = n!P_1^n$$

3个玻色子的例子

$$
\begin{array}{ccc}
a \rightarrow 1 & a \rightarrow 1 & a \rightarrow 2 \\
b \rightarrow 2 & b \rightarrow 3 & b \rightarrow 1 \\
c \rightarrow 3 & c \rightarrow 2 & c \rightarrow 3 \\
\\
a \rightarrow 2 & a \rightarrow 3 & a \rightarrow 3 \\
b \rightarrow 3 & b \rightarrow 1 & b \rightarrow 2 \\
c \rightarrow 1 & c \rightarrow 2 & c \rightarrow 1
\end{array}
$$

$$
|a_1 b_2 c_3 \ldots + a_1 b_3 c_2 . + a_2 b_1 c_3 \ldots
$$

$$
+ a_2 b_3 c_1 \ldots + \text{etc.} + \text{etc.}|^2 = |3!abc|^2
$$



如果有n个粒子散射到同一方向，第$n+1$个散射到这一方向的概率。

$$P_n = n!P_1^n, \qquad P_{n+1} = (n+1)!P_1^{n+1} = (n+1)P_1P_n$$

n个可分辨粒子散射到同一方向，第$n+1$个散射到这一方向的概率。

$$P_n = P_1^n, \qquad\qquad P_{n+1} = P_1^n = P_1 P_n$$

玻色粒子有合群的倾向， 完全来源于不可分辨， 量子关联

一般，玻色子倾向于占据同一个状态

玻色-爱因斯坦凝聚

费米子：不相容原理

考虑两个费米子散射到1， 2 两个方向， 概率幅

$$a_1 b_2 - a_2 b_1$$

当1， 2 趋于重合， $a_1 \to a$, $a_2 \to a$, $b_1 \to b$, $b_2 \to b$

$$\phi = ab - ab = 0$$

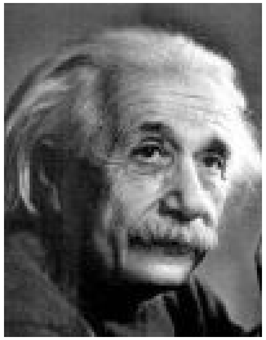
两个全同的费米子不可能占据同一状态

Pauli （泡利）不相容原理

原子结构

自旋与统计！

我们理解自旋了吗？



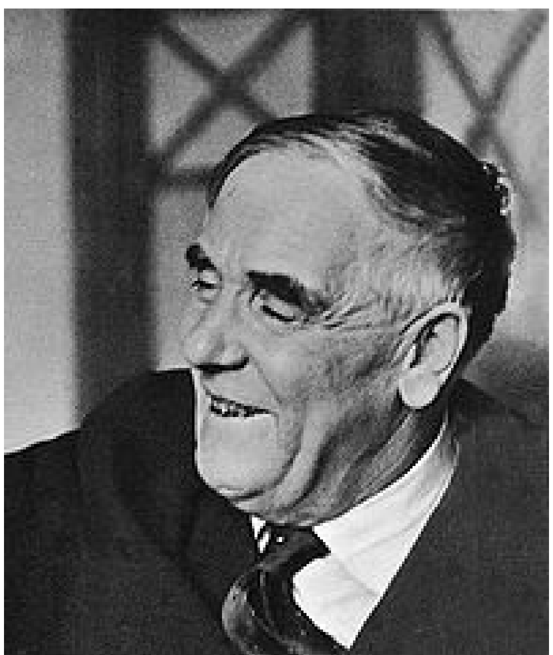
玻色-爱因斯坦凝聚

1924年，印度的物理学家玻色构造了零质量玻色粒子（光子）的统计理论，并把文章寄给 爱因斯坦，请求爱因斯坦帮助发表。

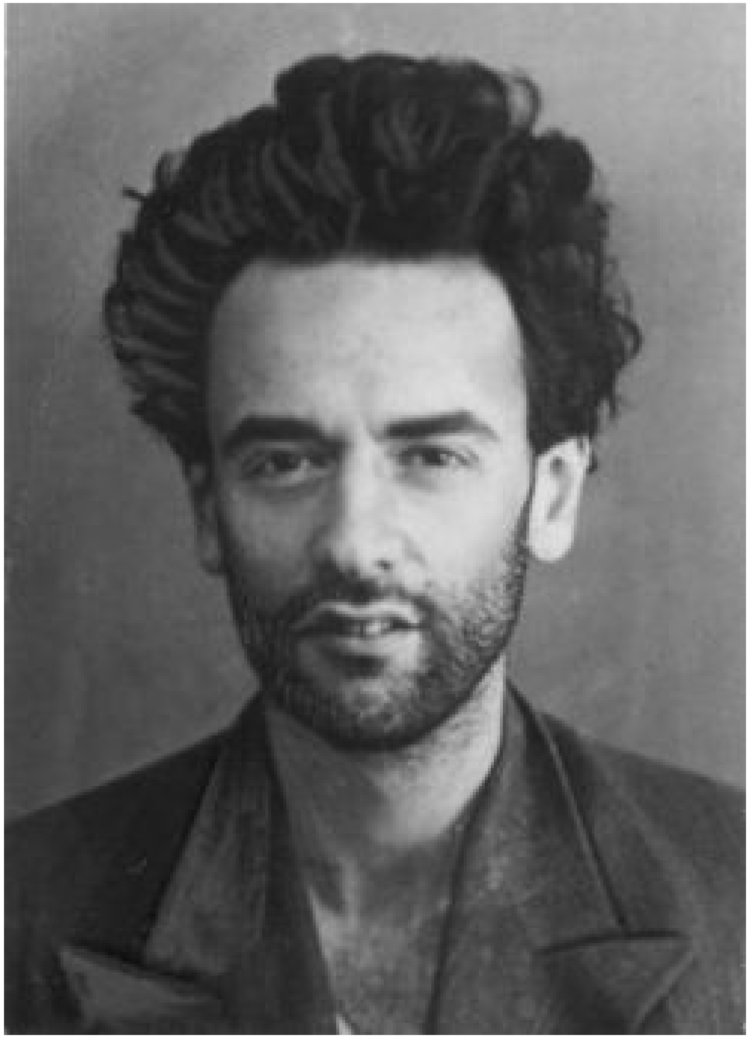
爱因斯坦非常欣赏玻色的论文，不仅帮他翻译成德文送交发表，同时也把玻色的理论推广到 有质量的玻色粒子，并从理论上预言了有质量的玻色粒子在低温下将凝聚到能量最低的状态。

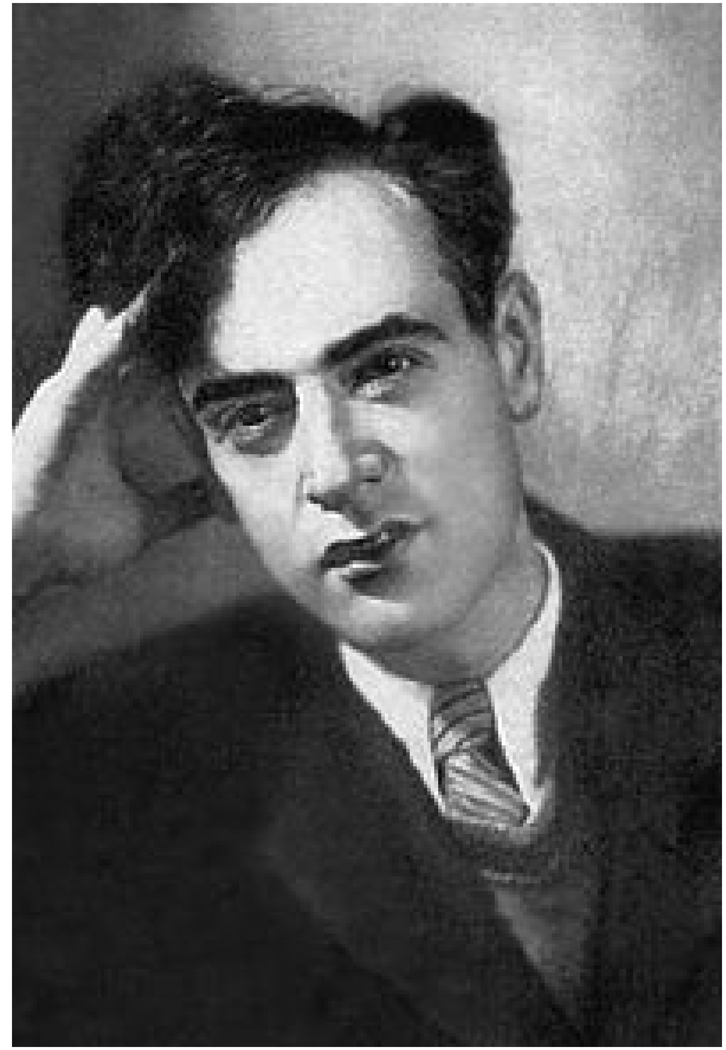
后来，这种凝聚现象称之为玻色-爱因斯坦凝聚。

1938年，卡皮察等人发现了液氦中的超流现象，转变温度大约是$2.17K$。很快，就认定超流是由于部分 玻色-爱因斯坦凝聚造成的。



Пётр Леони́дович Капи́ца
(8 July 1894 – 8 April 1984)
Soviet/Russian physicist and Nobel laureate.





Lev Landau （1908—1968），1962年因超流理论而获得诺贝尔物理奖

Landau 排名

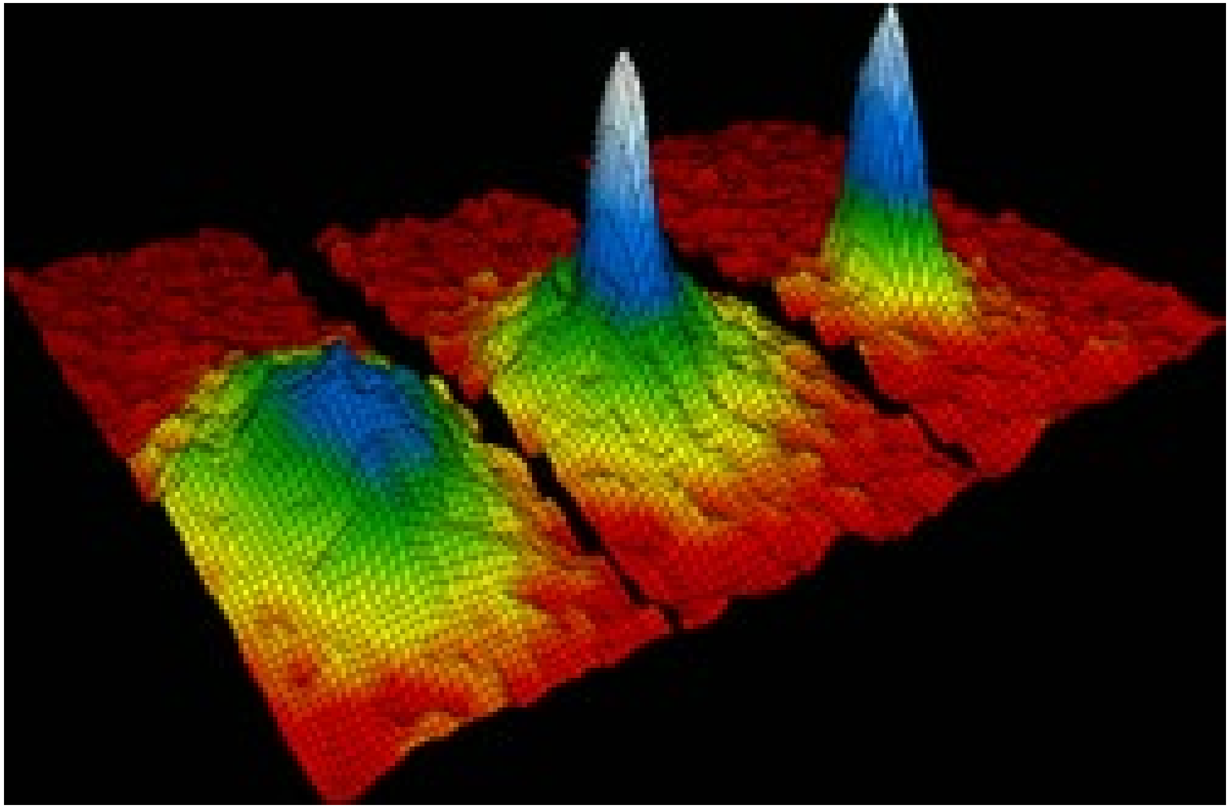
爱因斯坦： 0.5
波尔，海森堡，狄拉克，…： 1
朗道： 2.5 → 2

1995年，制作出纯的玻色-爱因斯坦凝聚。 Eric Cornell, Carl Wieman

Wolfgang Ketterle

他们利用了由朱棣文， Claude Cohen-Tannoudji,和 William D. Phillips 发展的冷却技术， 在磁约束下获得了玻色-爱因斯坦凝聚体。

2001 Nobel Prize in Physics



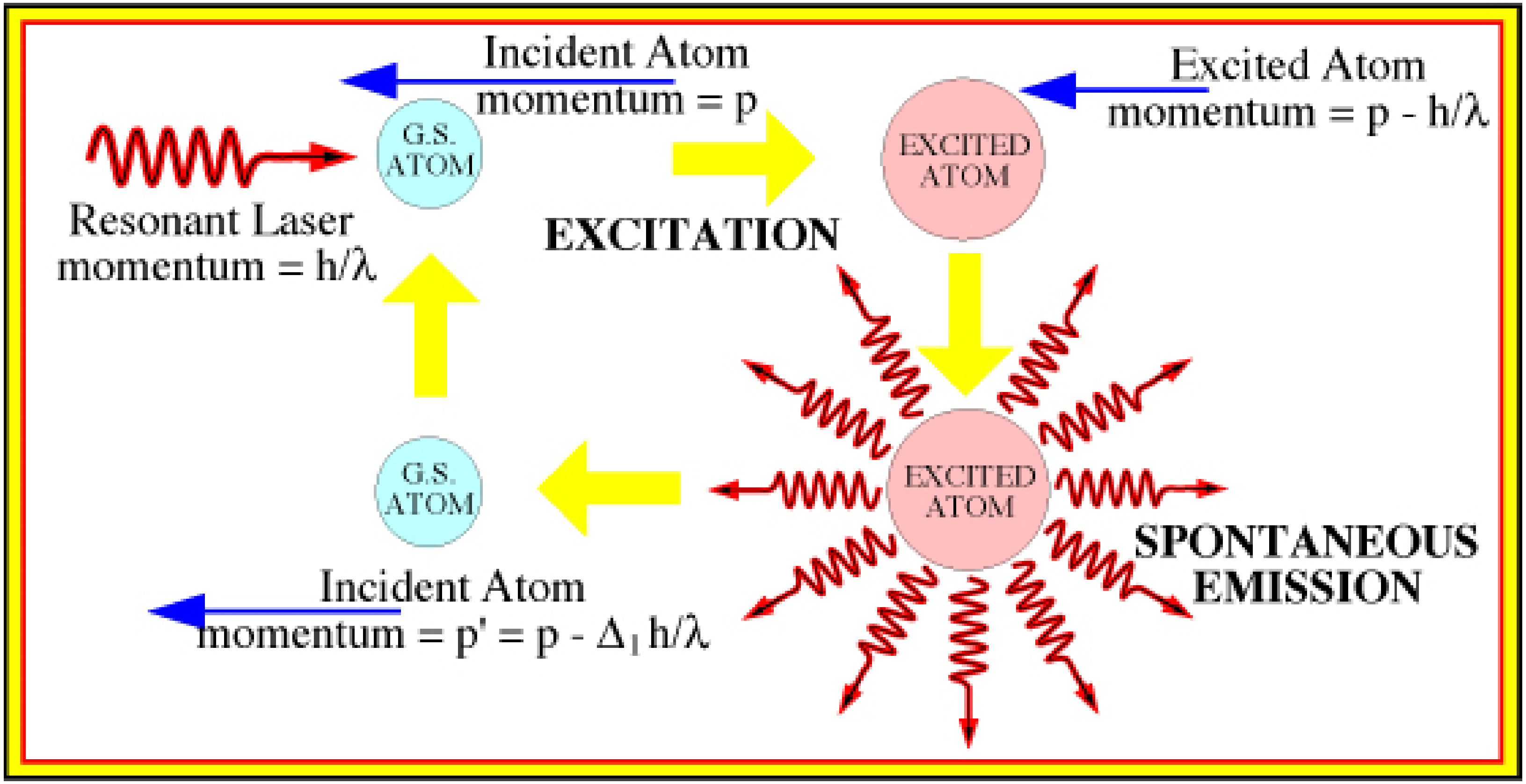
铷(rubidium)原子的速度分布，证实了玻色-爱因斯坦凝聚的存在.

激光冷却

Claude Cohen-Tannoudji

朱棣文

William Daniel Phillips


Incident Atom
momentum = p
Excited Atom
momentum = p - h/λ
G.S.
ATOM
EXCITED
ATOM
Resonant Laser
momentum = h/λ
EXCITATION
G.S.
ATOM
EXCITED
ATOM
SPONTANEOUS
EMISSION
Incident Atom
momentum = p' = p - Δ1 h/λ

激光冷却

玻色-爱因斯坦凝聚：物质相干态，或物质激光，有什么用？

通讯，隐形传质，量子计算机，……